专题：定性响应模型
Models with Discrete Dependent Variables

本节内容：

专题：定性响应回归模型

- 6.1 定性响应模型的性质
- 6.2 线性概率模型(LPM)
- 6.3 Logit模型
- 6.4 Probit模型
- 6.5 LPM、Logit模型及Probit模型比较

定值响应模型

什么是定性响应模型?

- 简单地说，被解释变量Y是定性变量的回归模型。
  - 定性变量包括：
    - 顺序型：产品等级、教育程度、满意程度；（顺序取值）
    - 分类型：性别、种族、肤色、宗教、国籍、地区、政治动乱和党派等。（0-1取值，没有次序）

定性响应模型的用途

- 研究某些决策选择（被解释变量Y的取值）受其他变量（解释变量X）影响的概率。
- 定制响应模型，也称概率模型。

定值响应模型

定性响应模型分类

- 二值响应模型（Binary Response）
  - 线性概率模型（LPM）
  - Logit模型
  - Probit模型
  - Tobit模型
- 多值响应模型（Multiple-response）
  - 顺序响应模型
  - 无序响应模型
  - 持续期限模型

线性概率模型
（Linear Probability Model, LPM）

线性概率模型(LPM)：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \tag{15.2.1}$$

其中 X=家庭收入。Y=1，如果该家庭拥有住房；Y=0，如果该家庭不拥有住房。

Y_i服从贝努利概率分布：

Y_i	概率
0	$1-P_i$
1	P_i
总和	1

Y_i的期望（估计值）：$E(Y_i \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i = P_i$

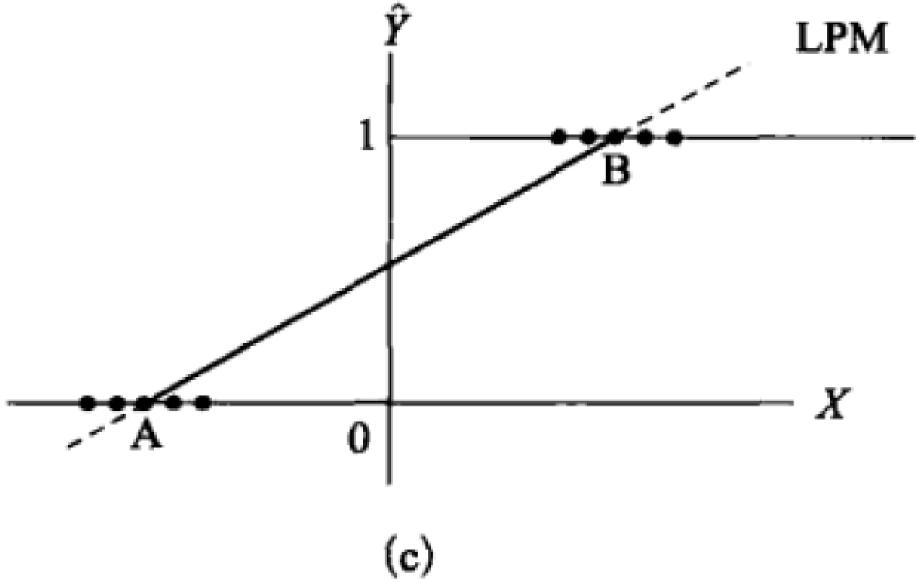
Y_i的方差：$\operatorname{var}(u_i) = P_i(1 - P_i)$

LPM的估计方法：OLS

线性概率模型
（Linear Probability Model, LPM）

线性概率模型的不足：

- 随机扰动项μ_i非正态分布；
- 随机扰动项μ_i的异方差；
- 难以满足 $0 \leqslant E(Y_i \mid X_i) \leqslant 1$ 的约束；
- 偏低的R^2。



(c)

图 15—1　线性概率模型

线性概率模型
（Linear Probability Model, LPM）

线性概率模型的改进：

- 针对不满足 $0 \leqslant E(Y_i \mid X_i) \leqslant 1$ 情形
  - 思路1(Censored data)：Tobit模型（Probit模型的扩展）

    当Y_i的估计值落在[0,1]区间之外时，

    Y_i的估计值<0,取值为0

    Y_i的估计值>1,取值为1
  - 思路2（函数变换）： Logit模型/Probit模型

    设计一种方法，使得 $0 \leqslant E(Y_i \mid X_i) \leqslant 1$ 成立。

    实现方式：CDF函数

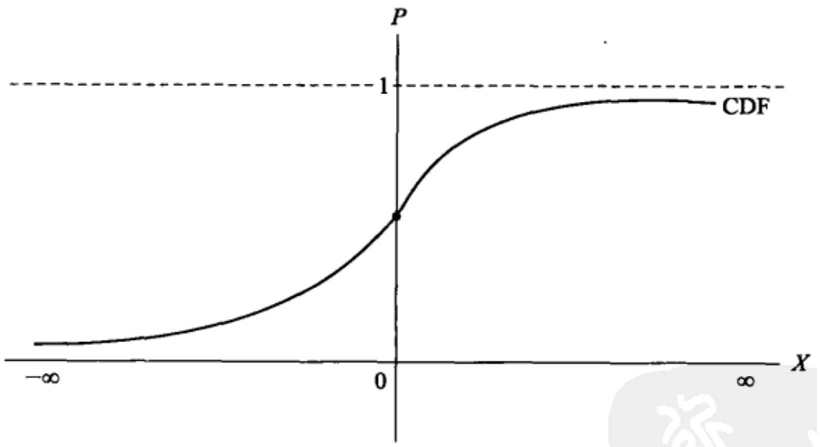


图 15—2 一个累积分布函数（CDF）

Logit模型

Logit模型

- 线性模型 $P_i = \beta_1 + \beta_2 X_i$

- Logistic分布函数（CDF）的转换：

$$P_i = \frac{1}{1+e^{-Z_i}} = \frac{e^{Z_i}}{1+e^{Z_i}}$$

其中 $Z_i = \beta_1 + \beta_2 X_i$。

Logit模型：$L_i = \ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$

其中：$\frac{P_i}{1-P_i}$ 称为机会比率（odd ratio）

Logit模型的估计方法：MLE(极大似然法)

Logit模型：例子

表 15—7 个性化教学体系（PSI）对课程成绩影响的数据

观测	GPA 分数	TUCE 分数	PSI	期末成绩 Y	成绩等级	观测	GPA 分数	TUCE 分数	PSI	期末成绩 Y	成绩等级
1	2.66	20	0	0	C	17	2.75	25	0	0	C
2	2.89	22	0	0	B	18	2.83	19	0	0	C
3	3.28	24	0	0	B	19	3.12	23	1	0	B
4	2.92	12	0	0	B	20	3.16	25	1	1	A
5	4.00	21	0	1	A	21	2.06	22	1	0	C
6	2.86	17	0	0	B	22	3.62	28	1	1	A
7	2.76	17	0	0	B	23	2.89	14	1	0	C
8	2.87	21	0	0	B	24	3.51	26	1	0	B
9	3.03	25	0	0	C	25	3.54	24	1	1	A
10	3.92	29	0	1	A	26	2.83	27	1	1	A
11	2.63	20	0	0	C	27	3.39	17	1	1	A
12	3.32	23	0	0	B	28	2.67	24	1	0	B
13	3.57	23	0	0	B	29	3.65	21	1	1	A
14	3.26	25	0	1	A	30	4.00	23	1	1	A
15	3.53	26	0	0	B	31	3.10	21	1	0	C
16	2.74	19	0	0	B	32	2.39	19	1	1	A

注：成绩 $Y=1$，如果期末成绩等级为 A；
$=0$，如果期末成绩等级为 B 或 C。
TUCE＝学期初为测试学生的宏观经济学知识而进行的一项考试的成绩（期初测试成绩）。
PSI $=1$，如果采用新的教学方法；
$=0$，如果不采用新的教学方法。
GPA＝开始学习中级微观经济学时的平均成绩。
资料来源：L. Spector and M. Mazzeo，“Probit Analysis and Economic Education,” *Journal of Economic Education*，vol. 11，1980，pp. 37-44.

Logit模型：估计结果

表 15—8　　方程（15.8.1）的回归结果

Dependent Variable: Grade
Method: ML-Binary Logit
Convergence achieved after 5 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	Z Statistic	Probability
C	-13.0213	4.931	-2.6405	0.0082
GPA	2.8261	1.2629	2.2377	0.0252
TUCE	0.0951	0.1415	0.67223	0.5014
PSI	2.3786	1.0645	2.2345	0.0255

McFadden $R^2 = 0.3740$　　LR statistic (3 df) = 15.40419

回归结果估计系数的解释：

解释1：解释变量i的1单位变动导致机会比率的对数β_i单位变化

解释2：解释变量i的1单位变动导致机会比率e^{β_i}单位变动；

比如：上述结果中，PSI的系数为2.3786，这表明：给定其他条件不变，接受新教学方法的学生获得A的概率比没有接受新教学方法的学生高出近10倍（ $e^{2.3786} - e^0 \approx 10.7897 - 1 = 9.7897 \approx 10$ ）。

Probit模型

Probit模型

- 线性模型 $P_i = \beta_1 + \beta_2 X_i$

- Probit的转换：

第1步：

$$I_i = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

其中 X_i 表示第 i 个家庭的收入。

第2步：

给定正态性假定，$I_i^* \leqslant I_i$ 的概率可由标准化正态 CDF 算出[①]：

$$P_i = P(Y=1 \mid X) = P(I_i^* \leqslant I_i) = P(Z_i \leqslant \beta_1 + \beta_2 X_i) = F(\beta_1 + \beta_2 X_i)$$

第3步：Probit模型

$$F(I_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{I_i} e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_1 + \beta_2 X_i} e^{-z^2/2} dz$$

Proit模型的估计方法：MLE(极大似然法)

Probit模型：估计结果

表 15—13

Dependent Variable: grade
Method: ML–Binary probit
Convergence achieved after 5 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	Z-Statistic	Probability
C	-7.4523	2.5424	-2.9311	0.0033
GPA	1.6258	0.6938	2.3430	0.0191
TUCE	0.0517	0.0838	0.6166	0.5374
PSI	1.4263	5950	2.3970	0.0165

LR statistic (3 df) = 15.5458　McFadden R^2 = 0.3774
Probability (LR stat) = 0.0014

回归结果估计系数的解释：

解释变量i的1单位变动导致被解释变量选择概率的 $f(\beta_1+\beta_2 X_i)\beta_2$ 单位变动；

Logit模型与Probit模型比较

- Logit模型与Probit模型的分布比较：

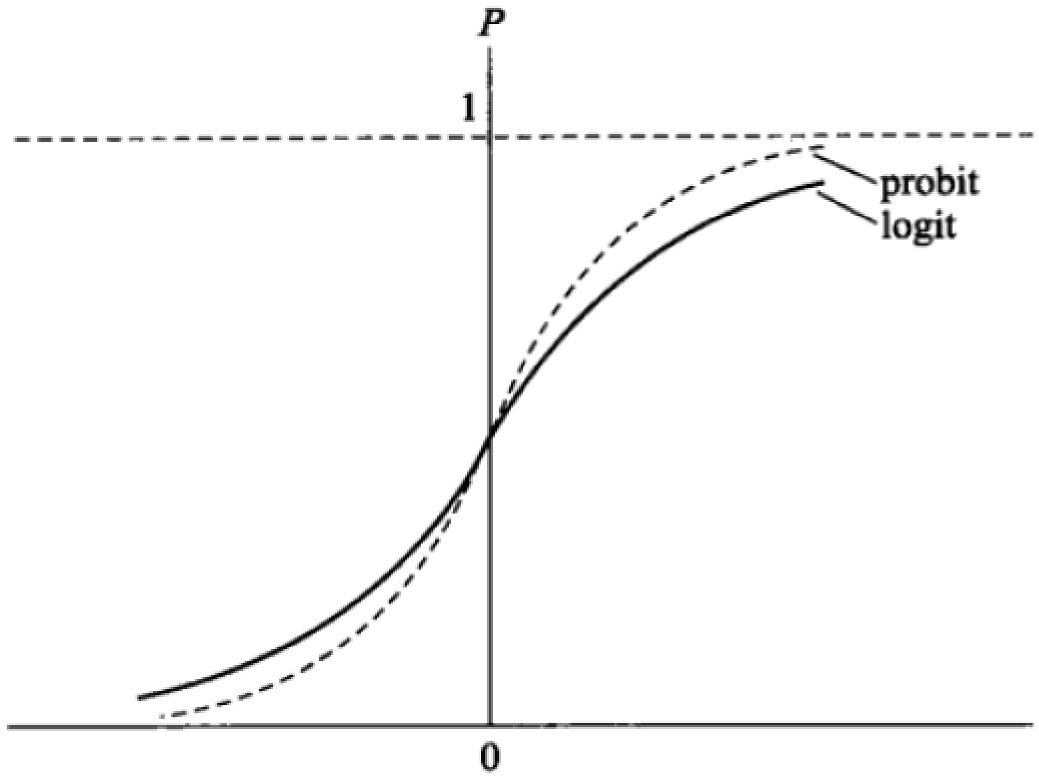


图 15—6　logit 和 probit 模型的累积分布

- 实际上， Logit模型与Probit模型分布比较接近，估计结果也比较接近。

Logit模型与Probit模型比较

- Logit模型与Probit模型的估计结果比较：

表 15—8　方程（15.8.1）的回归结果

Dependent Variable: Grade
Method: ML-Binary Logit
Convergence achieved after 5 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	Z Statistic	Probability
C	-13.0213	4.931	-2.6405	0.0082
GPA	2.8261	1.2629	2.2377	0.0252
TUCE	0.0951	0.1415	0.67223	0.5014
PSI	2.3786	1.0645	2.2345	0.0255

McFadden $R^2 = 0.3740$　LR statistic (3 df) = 15.40419

表 15—13

Dependent Variable: grade
Method: ML–Binary probit
Convergence achieved after 5 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	Z-Statistic	Probability
C	-7.4523	2.5424	-2.9311	0.0033
GPA	1.6258	0.6938	2.3430	0.0191
TUCE	0.0517	0.0838	0.6166	0.5374
PSI	1.4263	5950	2.3970	0.0165

LR statistic (3 df) = 15.5458　McFadden $R^2 = 0.3774$
Probability (LR stat) = 0.0014

Logit模型与Probit模型比较

- 线性概率模型(OLS模型）与logit/probit模型估计结果比较：

比较项目	OLS 模型	Logit 模型/Probit 模型
估计方法	OLS（最小二乘法）	ML(极大似然法)
单个系数显著性评价	t 统计量（t 分布）	Z 统计量（标准正态）
拟合优度	R^2，或者调整的R^2	McFadden R^2 或计数 R^2
所有系数联合检验	Wald 检验	LR(似然比)检验

- Eviews回归结果：线性概率模型、Logit模型和Probit模型
- 系数比较：

$$\beta_{probit} * 1.81 \approx \beta_{logit}$$

$\beta_{LPM} = 0.25\beta_{logit}$ 除截距之外的其他系数

$\beta_{LPM} = 0.25\beta_{logit} + 0.5$ 截距