本章内容：

第三章 多元线性回归模型

本节内容：

§3.1 多元回归分析：估计问题

三变量模型
——符号与约定

- 三变量的PRF为：

（式7.1.1）

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

  - β_1 ：截距项
  - u_i 表示所有未包含到模型中来的变量对Y的平均影响。
  - β_2 和 β_3：偏回归系数（partial regression coefficients）
  - i：指第i次观测，当数据为时间序列时用t表示；

三变量模型
——CLRM假设

- 假设1：线性回归模型
  - 模型中参数必须线性，变量可以不是线性；

（式7.1.2）

- 假设2：X是固定的或独立于误差项
  - 每个u_i和每个X之间协方差为0

（式7.1.3）

$$\boxed{\operatorname{cov}(X_{2i},\mu_i)=\operatorname{cov}(X_{3i},\mu_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n}$$

- 假设3：干扰项u_i的均值为零，即：

（式7.1.4）

$$E(u_i\mid X_{2i},X_{3i})=0$$

- 假设4：同方差性或μ_i的方差相等

（式7.1.5）

$$\operatorname{var}(u_i)=\sigma^2$$

三变量模型
——CLRM假设

（式7.1.4）

- 假设5：干扰项u_i无序列相关

$$\mathrm{cov}(u_i, u_j) = 0 \qquad i \neq j$$

（式7.1.5）

- 假设6：观测次数n必须大于参数个数（3）

（式7.1.6）

- 假设7：X变量值必须存在变异

（式7.1.7）

- 假设8：X变量间不存在**完全共线性**：

（式7.1.8）

- 假设9：模型无设定偏误

对多元回归方程的解释

（式7.1.1）

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

（式7.2.1）

$$E(Y_i \mid X_{2i}, X_{3i}) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$$

- 多元回归分析是以多个解释变量的固定值为条件的回归分析。
- 我们所获得的，是各个自变量X值固定时，Y的平均值或Y的平均响应（mean response）。

偏回归系数
——含义

（式7.1.1）

（式7.2.1）

- 偏回归系数的含义：
  - β_2 度量着在保持X_3不变的情况下，X_2每变化1个单位时，Y的均值 $E(Y)$ 的变化。换一句话说，β_2 给出X_2的单位变化对Y均值的“直接”或“净”影响（净在不染有X_3的影响）。
  - β_3则给出了X_3的单位变化对Y均值 $E(Y)$的“直接”或“净”影响，净在不沾有X2的影响。

理解偏回归系数——儿童死亡率案例
——如何分离出PNGP对CM的“真实”或净影响呢？

➢ （一）多元回归模型的理解

$$CM_i = 263.6416 - 0.0056PGNP_i - 2.231FLR_i$$

$$s.e. \quad (11.5932) \quad (0.0019) \quad (0.2099)$$

$$R^2 = 0.7077$$

$$\overline{R}^2 = 0.6981$$

理解偏回归系数——儿童死亡率案例
——如何分离出PNGP对CM的“真实”或净影响呢？

- （二）一元回归模型的理解

- （1）死亡率对妇女识字率的回归

（式7.1.1）

$$\mathrm{CM}_i = 263.8635 - 2.3905\mathrm{FLR}_i + e_{1i}$$
$$s.e.\quad (12.2249)\quad (0.2133)$$
$$\mathrm{r}^2 = 0.6695$$

（式7.2.1）

$$e_{1i} = \mathrm{CM}_i - 263.8635 + 2.3905\mathrm{FLR}_i$$

- （2）人均国民收入对妇女识字率的回归

$$\mathrm{PNGP}_i = -39.3033 + 28.1427\mathrm{FLR}_i + e_{2i}$$
$$s.e.\quad (734.9526)\quad (12.8211)$$
$$\mathrm{r}^2 = 0.0721$$

$$e_{2i} = \mathrm{PNGP}_i + 39.3033 - 28.1427\mathrm{FLR}_i$$

理解偏回归系数
——示例：儿童死亡率

- 如何分离出X_2对Y的“真实”或净影响呢？
- （3）死亡率对人均国民收入的“净”回归
  - A. 剔除FLR影响后的“净”CM

（式7.1.1）

$$e_{1i} = \mathrm{CM}_i - 263.8635 + 2.3905\mathrm{FLR}_i$$

  - B. 剔除FLR影响后的“净”PNGP

（式7.2.1）

$$e_{2i} = \mathrm{PNGP}_i + 39.3033 - 28.1427\mathrm{FLR}_i$$

  - C. CM对PNGP的“净”回归——剔除了FLR影响

$$\hat{e}_{1i} = -0.0056 e_{2i}$$
$$s.e.\quad (0.0019) \qquad\qquad \mathrm{r}^2 = 0.1152$$

偏回归系数的OLS估计
——样本回归函数（SRF）

- 样本回归函数（SRF）

（式7.4.1）(SRF)

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i}$$

（式7.4.1）(SRF_s)

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + e_i$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i}$$

（式7.1.1）(PRF)

$$\mathrm{E}(Y_i \mid (X_{2i}, X_{3i}) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$$

（式7.1.1）(PRF_s)

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

偏回归系数的OLS估计

——OLS方法和参数β的OLS估计量$\hat{\beta}_i$

（式7.4.2）

$$\min \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})^2$$

（式7.4.3）

（式7.4.4）

（式7.4.5）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-X_{2i}) = 0 \\ \dfrac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_3} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-X_{3i}) = 0 \end{cases}$$

（式7.4.6）

（式7.4.7）

（式7.4.8）

$$\begin{cases} \bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 + \hat{\beta}_3 \bar{X}_3 \\ \sum Y_i X_{2i} = \hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum X_{2i} X_{3i} \\ \sum Y_i X_{3i} = \hat{\beta}_1 \sum X_{3i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} X_{3i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i}^2 \end{cases}$$

正规方程组

偏回归系数的OLS估计

——OLS方法和参数$\hat{\beta}_i$的OLS估计量

（式7.4.9）

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

（式7.4.10）

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

（式7.4.11）

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

OLS估计量$\hat{\beta}_i$的特点：

- ①可以从方程（7.4.7）和（7.4.8）中的一个通过x_2和x_3的对调而得到另一个，所以，它们本质上是对称的。
- ②两个方程的分母完全相同。
- ③三变量情形是双变量情形的自然而然的推广。

偏回归系数的OLS估计

——OLS估计量$\hat{\beta}_1$的方差和标准误

($\hat{\beta}_1$真实方差)

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_1}=\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)=[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar{X}_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar{X}_2\bar{X}_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\sigma^2$$

($\hat{\beta}_1$ 真实标准差)

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar{X}_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar{X}_2\bar{X}_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\sigma^2}$$

($\hat{\beta}_1$样本方差)

$$S^2_{\hat{\beta}_1}=[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar{X}_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar{X}_2\bar{X}_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\hat{\sigma}^2$$

($\hat{\beta}_1$ 样本标准差)

$$S_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar{X}_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar{X}_2\bar{X}_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\hat{\sigma}^2}$$

偏回归系数的OLS估计

——OLS估计量$\hat{\beta}_2$的方差和标准误

($\hat{\beta}_2$真实方差)

$$\sigma_{\hat{\beta}_2}^2=\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)=\frac{\sum x_{3i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2)-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}$$

($\hat{\beta}_2$ 真实标准差)

$$\sigma_{\hat{\beta}_2}=\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}}$$

$$r_{23}^2=\frac{(\sum x_{2i}x_{3i})^2}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2}$$

($\hat{\beta}_2$样本方差)

$$S_{\hat{\beta}_2}^2=\frac{\sum x_{3i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2)-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}\hat{\sigma}^2=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}$$

($\hat{\beta}_2$ 样本标准差)

$$S_{\hat{\beta}_2}=\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}}$$

偏回归系数的OLS估计

——OLS估计量$\hat{\beta}_3$的方差和标准误

($\hat{\beta}_3$真实方差)

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_2} = \mathrm{var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sum x_{2i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i}x_{3i})^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}$$

($\hat{\beta}_3$ 真实标准差)

$$\sigma_{\hat{\beta}_3} = \sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}}$$

$$r_{23}^2 = \frac{(\sum x_{2i}x_{3i})^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2}$$

($\hat{\beta}_3$样本方差)

$$S^2_{\hat{\beta}_3} = \frac{\sum x_{2i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i}x_{3i})^2}\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}$$

($\hat{\beta}_3$ 样本标准差)

$$S_{\hat{\beta}_3} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}}$$

偏回归系数的OLS估计
——σ^2的OLS估计量$\hat{\sigma}^2$

- 可以证明$\hat{\sigma}^2$是σ^2的无偏估计量：

（式7.4.9）

$$(n-3)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-3) \rightarrow E(\hat{\sigma}^2)=E(\sigma^2)$$

（式7.4.10）

$$\text{其中：}\hat{\sigma}^2=\frac{\sum e_i^2}{n-3}$$

残差方差：因为在估计$\sum e_i^2$之前，必须先估计$\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2$和$\hat{\beta}_3$，损失3个自由度(f.d.=n-3)。四变量中(f.d.=n-3)

（式7.4.19）

$$\begin{aligned}\sum e_i^2 &= \sum(e_i e_i)\\ &= \sum e_i(y_i-\hat{\beta}_2 x_{2i}-\hat{\beta}_3 x_{3i})\\ &= \sum e_i y_i\\ &= \sum y_i(y_i-\hat{\beta}_2 x_{2i}-\hat{\beta}_3 x_{3i})\\ &= \sum y_i^2-\hat{\beta}_2\sum y_i x_{2i}-\hat{\beta}_3\sum y_i x_{3i}\end{aligned}$$

$$\sum e_i x_{2i}=\sum e_i x_{3i}=0$$

偏回归系数的OLS估计

——OLS估计量的性质：偏回归系数$\hat{\beta}_{ki}$是一个BLUE

- 偏回归系数的OLS估计量是**最佳线性无偏估计**(BLUE)
  - 如同双变量模型，它们也满足高斯-马尔可夫定理()

偏回归系数的OLS估计
——*OLS*估计量的性质

- 1. 三变量回归面通过均值点$(\bar{Y},\bar{X}_2,\bar{X}_3)$：

$$\bar{Y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\bar{X}_2+\hat{\beta}_3\bar{X}_3$$

三变量模型情况

$$\bar{Y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\bar{X}_2+\hat{\beta}_3\bar{X}_3+\cdots+\hat{\beta}_K\bar{X}_K$$

k变量模型情况

- 2. 估计的$\hat{Y}_i$的均值（即$\bar{\hat{Y}}_i$）等于真实Y_i的均值(即$\bar{Y}$)：

（式7.4.22）

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i&=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2i}+\hat{\beta}_3X_{3i}\\&=(\bar{Y}-\hat{\beta}_2\bar{X}_2-\hat{\beta}_3\bar{X}_3)+\hat{\beta}_2X_{2i}+\hat{\beta}_3X_{3i}\\&=\bar{Y}+\hat{\beta}_2(X_{2i}-\bar{X}_2)+\hat{\beta}_3(X_{3i}-\bar{X}_3)\\&=\bar{Y}+\hat{\beta}_2x_{2i}+\hat{\beta}_3x_{3i}\end{aligned}$$

$$\bar{Y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\bar{X}_2+\hat{\beta}_3\bar{X}_3$$

$$1/n\sum\hat{Y}_i=1/n\sum\left(\bar{Y}+\hat{\beta}_2x_{2i}+\hat{\beta}_3x_{3i}\right)$$

$$\bar{\hat{Y}}=\bar{Y}$$

$$\sum x_{2i}=0,\sum x_{3i}=0$$

偏回归系数的OLS估计
——*OLS*估计量的性质

- 3. 残差和等于0：$\sum e_i = \bar{e}_i = 0$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-1) = 0$$

正规方程之一

- 4. 残差e_i与X_{2i}和X_{3i}都不相关：$\sum e_i X_{2i} = \sum e_i X_{3i} = 0$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-X_{2i}) = 0$$

正规方程之二

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_3} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-X_{3i}) = 0$$

正规方程之三

偏回归系数的OLS估计
——*OLS*估计量的性质

- 5. 残差e_i与$\hat{Y}_i$不相关：$\sum e_i\hat{Y}_i=0$

$$\sum e_i\hat{Y}_i=\sum e_i(\hat{y}_i+\bar{Y})=\sum e_i\hat{y}_i+\bar{Y}\sum e_i=0$$

（式7.4.22）

$$\begin{aligned}\sum \hat{y}_i e_i &= \hat{\beta}_2\sum x_{2i}e_i+\hat{\beta}_3\sum x_{3i}e_i\\ &=\hat{\beta}_2\sum (X_{2i}-\bar{X}_2)e_i+\hat{\beta}_3\sum (X_{3i}-\bar{X}_3)e_i\\ &=\hat{\beta}_2\sum X_{2i}e_i-\hat{\beta}_2\bar{X}_2\sum e_i+\hat{\beta}_3\sum X_{3i}e_i-\hat{\beta}_3\bar{X}_3\sum e_i\\ &=0\end{aligned}$$

$$\hat{y}_i=\hat{\beta}_2x_{2i}+\hat{\beta}_3x_{3i}$$

已证明

偏回归系数的OLS估计
——OLS估计量的性质

➢ 6. $var(\hat{\beta}_2)$和$var(\hat{\beta}_3)$ 的关系：

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)=\sigma^2_{\hat{\beta}_2}=\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_3)=\sigma^2_{\hat{\beta}_3}=\frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}$$

a.给定$\sum x_{ki}{}^2$和σ^2：

$r_{23}\to 1$, $var(\hat{\beta}_3)\to\infty$; $var(\hat{\beta}_3)\to\infty$

真值β_i的估计将变得很困难！

b.给定$\sum x_{ki}{}^2$和$\boldsymbol{r}_{23}{}^2$:

$var(\hat{\beta}_i)$与总体方差呈正比！

c.给定σ^2和$\boldsymbol{r}_{23}{}^2$:

$var(\hat{\beta}_i)$与$\sum x_{ki}{}^2$呈反比！表明X_{ki}样本值变化越大，真值β_i的估计精度越高！

多元判定系数R^2与多元相关系数R
——平方和分解

- 多元判定系数：在三变量（或者更多变量）的模型中，衡量Y的变异由变量X_{1i}、X_{2i}等联合解释的比重，记作R^2：

（式7.5.1）

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + e_i$$

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$$

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 + \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + e_i = \hat{y}_i + e_i$$

（式7.5.3）

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 + 2\sum \hat{y}_i e_i = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$$

TSS = ESS + RSS

总离差平方和 = 回归平方和 + 残差平方和

多元判定系数R^2与多元相关系数R
——R^2计算公式

- 容易得到R^2计算公式如下：

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \left(\sum y_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}\right)$$

（式7.5.4）

$$ESS = \sum \hat{y}_i^2 = \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$$

$$\mathrm{TSS} = \sum y_i^2$$

（式7.5.5）

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{\mathrm{RSS}}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}}{\sum y_i^2}$$

- R^2越接近于1，我们说模型“拟合”优度越高。

$$\left(\text{比较:一元回归:} r^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = \hat{\beta}_2^2 \left(\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}\right)\right)$$

（讨论）

讨论：在一元回归中，r可正可负；但是，在多元回归中，R永远取正值。实际上，R没有太大的意义，用途不大。？有意义的是R^2

标准化变量回归的优势

——儿童死亡率与GNP和妇女识字率的关系

（式7. 6. 1）

$$\widehat{CM}_i = 263.6416 - 0.0056\,PGNP_i - 2.231\,FLR_i$$

（式7. 6. 2）

$$se = (11.5932)\quad(0.0019)\qquad(0.2099)\qquad R^2 = 0.7077$$

$$\bar{R}^2 = 0.6981\ ①$$

提问1：怎么陈述结论？大白话说出来！
提问2：如果PGNP提高1美元，FLR同时也提高1%，CM怎么变化？

（式7. 6. 3）

$$\widehat{CM}^* = -0.2026\,PGNP_i^* - 0.7639\,FLR_i^*$$

$$se = (0.0713)\qquad(0.0713)\qquad r^2 = 0.7077$$

（讨论）

提问1：怎么陈述结论？大白话说出来！
提问2：标准化变量后的回归结果与没有标准化的回归结果一致么？

设定偏误初探
——例说：儿童死亡率与GNP和妇女识字率的关系

- 错误拟合一个模型会导致严重后果：

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

$$Y_t = b_1 + b_{12} X_{2t} + u_{1t}$$

"真实"多元回归

（式7.7.1）

$$\widehat{CM}_i = 263.641\,6 - 0.005\,6\,PGNP_i - 2.231\,FLR_i$$

$$se = (11.593\,2)\quad(0.001\,9)\qquad(0.209\,9)\qquad R^2 = 0.707\,7$$

$$\bar{R}^2 = 0.698\,1 \text{ ①}$$

"误设"一元回归1

（式7.7.2）

$$\widehat{CM}_i = 157.424\,4 - 0.011\,4\,PGNP_i$$

$$se = (9.845\,5)\quad(0.003\,2)\qquad r^2 = 0.166\,2$$

"误设"一元回归2

（式7.7.3）

$$\widehat{CM}_i = 263.863\,5 - 2.390\,5\,FLP_i$$

$$se = (21.224\,9)\quad(0.213\,3)\qquad r^2 = 0.669\,6$$

（讨论）

如果你认定某个特殊的回归模型是“正确”模型，就不要从中略去一个或多个变量，而把它加以修改。
如果你忽视这条原则，你就会得到有偏误的参数估计。不仅如此，你还可能低估了真实的方差σ^2并因而低估了回归系数的估计标准误。

R^2与调整R^2 ($\overline{R^2}$)

——更高的R^2：请谨慎看待！

- R^2与变量X_{ki} 的数量(k−1)有关：

（式7. 8. 1）

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}}{\sum y_i^2}$$

（分母部分）

$$X_{ki} \xrightarrow{\text{变量数无关}} \sum y_i^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

（分子部分）

$$X_{ki} \xrightarrow{\text{变量数有关}} \sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$$

（ R²变化）

$$X_{ki} \uparrow \xrightarrow{\text{变量数有关}} \sum e_i^2 \downarrow; \sum y_i^2 \text{不变} \xrightarrow{\text{使得}} R^2 \uparrow$$

启示：模型选择时，较高的R^2可能来自解释变量个数的增加，并不能说明模型就一定更好。

R^2与调整R^2 $(\overline{R^2})$
——计算公式及变换形式

- **调整R^2**为校正（adjusted R^2）： 利用相应的自由度对平方和进行校正。

（式7.8.2）

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2/(n-k)}{\sum y_i^2/(n-1)}$$

  - k:三变量回归(二元回归)为3;

（式7.8.3）

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{S_Y^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$ 残差方差

$$S_Y^2 = \frac{\sum (Y-\bar{Y})^2}{n-1}$$ Y样本方差

（式7.8.4）

$$\bar{R}^2 = 1 - (1-R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

（讨论）

(1)如果k=1,则$R^2=\overline{R^2}$；(2)如果k>1,则$R^2>\overline{R^2}$。表明随着变量数的增多，$\overline{R^2}$相对要增大慢一些；(3)$R^2 \geq 0$，但$\overline{R^2}$可以小于0，此时可以处理为$\overline{R^2}=0$；(4)不能单凭最高的$\overline{R^2}$之值来选择模型，可参考的标准还可以有AIC、APC等。

R^2与调整R^2 ($\overline{R^2}$)

——模型选择标准的比较案例1：美国咖啡消费量与价格

表 7—1　1970—1980 年美国咖啡消费（Y）与平均真实零售价格（X）* 的关系

年份	Y（人均日消费杯数）	X（美元/磅）
1970	2.57	0.77
1971	2.50	0.74
1972	2.35	0.72
1973	2.30	0.73
1974	2.25	0.76
1975	2.20	0.75
1976	2.11	1.08
1977	1.94	1.81
1978	1.97	1.39
1979	2.06	1.20
1980	2.02	1.17

线性模型：

（式7.8.8）

$$\hat{Y}_t = 2.6911 - 0.4795 X_t$$

$$se = (0.1216)\ (0.1140) \qquad RSS = 0.1491 \quad r^2 = 0.6628$$

（式7.8.9）

$$\widehat{\ln Y_t} = 0.7774 - 0.2530 \ln X_t$$

$$se = (0.0152)(0.0494) \quad RSS = 0.0226 \quad r^2 = 0.7448$$

（讨论）

讨论1：两个模型可以进行拟合优度比较的基础或前提是什么？

Y和n必须一样

R^2与调整R^2 ($\overline{R^2}$)
——模型选择标准的案例2：儿童死亡率案例

（二元回归）

$$\widehat{CM}_i = 263.641\,6 - 0.005\,6\,PGNP_i - 2.231\,FLR_i$$
$$se = (11.593\,2)\ (0.001\,9)\qquad (0.209\,9)\qquad R^2 = 0.707\,7$$
$$\overline{R}^2 = 0.698\,1$$ ①

（一元回归）

$$\widehat{CM}_i = 263.863\,5 - 2.390\,5FLR_i$$
$$se = (12.224\,9)\ (0.213\,3)\qquad r^2 = 0.669\,5$$

（讨论）

讨论2：R^2可以在不同回归元之间进行分配吗？

不可以。

函数形式再议

——柯布-道格拉斯生产函数

（式7.9.1）

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{u_i}$$

其中Y=产出；
X_2=劳动投入；
X_3=资本投入；
u=随机干扰项；
e=自然对数的底。

（式7.9.2）

$$\begin{aligned}\ln Y_i &= \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i \\ &= \beta_0 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i\end{aligned}$$

$\beta_0 = \ln \beta_1$

（讨论）

$$\widehat{\ln Y_i} = 3.8876 + 0.4683 \ln X_{2i} + 0.5213 \ln X_{3i}$$

(0.3962) (0.0989) (0.0969)

t=(9.8115) (4.7342) (5.3803)

R^2=0.9642 df=48

$\bar{R}^2$=0.9627

展示数据表7-3

函数形式再议
——多项式回归

- **多项式回归模型(polynomial regression models)**

（式7. 10. 1）
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + \beta_3 X^2$$

（式7. 10. 2）
$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i^2 + u_i$$

（式7. 10. 3）
$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i^2 + \cdots + \beta_k X_i^k + u_i$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i}$$

（讨论）

思考1：上述模型是线性回归模型吗？
思考2：X与X的诸多幂函数之间是高度相关的吗？有没有违背自变量无多重共线性的CLRM假设？

思考1：是线性回归

思考2：不相关；

没有违背无多重共线性的假设

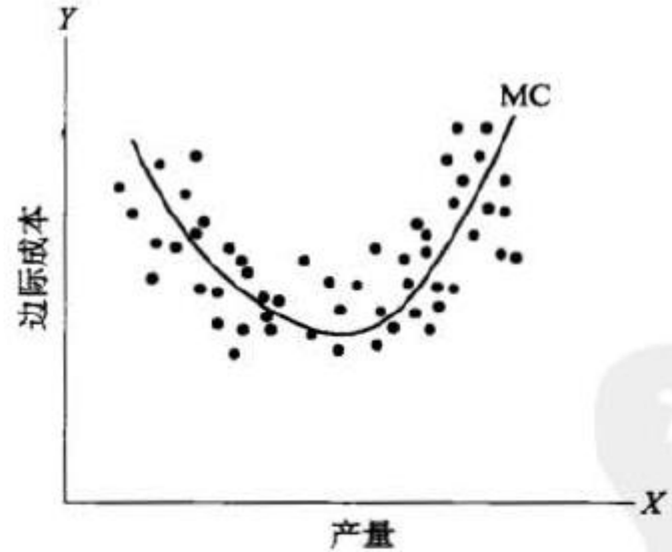

图 7—1 U型边际成本曲线

多项式回归模型

——一个说明案例：估计总成本函数

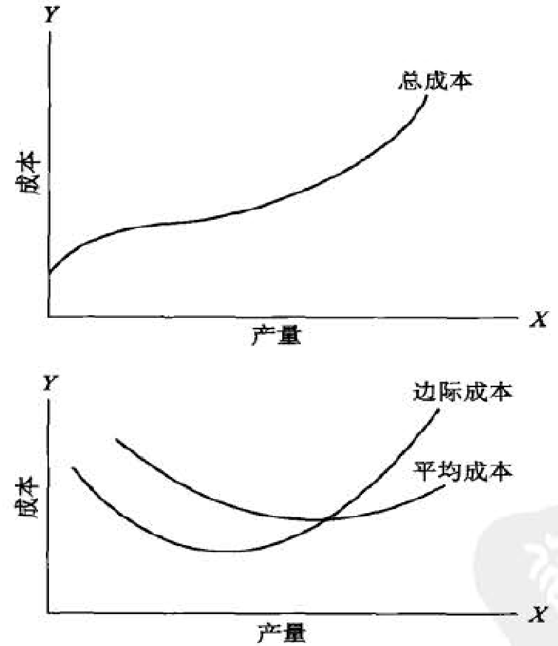

图 7—3 短期成本函数

表 7—4 总成本（Y）与产出（X）

产出	总成本（美元）
1	193
2	226
3	240
4	244
5	257
6	260
7	274
8	297
9	350
10	420

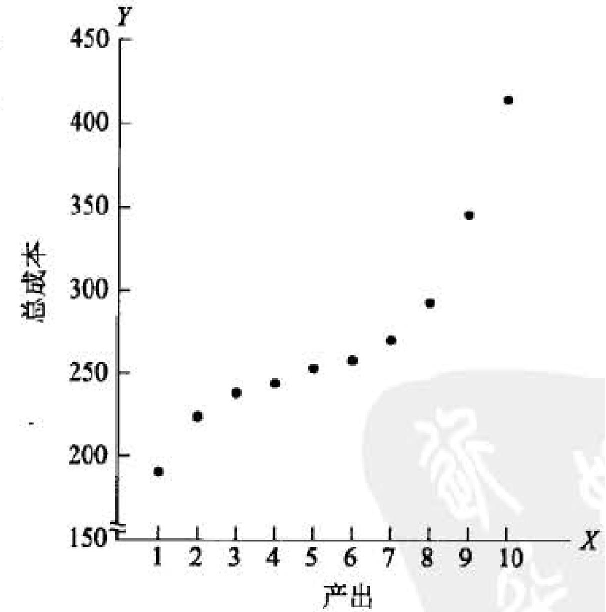

图 7—2 总成本曲线

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i^{\ 2} + \beta_4 X_i^{\ 3} + u_i$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \hat{\beta}_4 X_{4i}$$

$$\hat{Y}_i = 141.766\,7 + 63.477\,6\,X_i - 12.961\,5\,X_i^2 + 0.939\,6X_i^3$$

$$(6.375\,3) \quad (4.778\,6) \qquad (0.985\,7) \qquad (0.059\,1) \qquad R^2 = 0.998\,3$$

偏相关系数

——比较1：简单相关系数和偏相关系数

（SRF）

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i}$$

- 偏相关系数（partial correlation coefficient）：

若变量1为Y，变量2为X_{2i}，变量3为X_{3i}，则偏相关系数的含义如下：

- 保持X_{3i}不变，Y与X_{2i}之间的相关系数：

（式7.11.1）

$$r_{12\cdot3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}$$

- 保持X_{2i}不变，Y与X_{3i}之间的相关系数：

（式7.11.2）

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)}}$$

- 保持Y不变，X_{2i}与X_{3i}之间的相关系数：

（式7.11.3）

$$r_{23\cdot1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)}}$$

偏相关系数

——比较2：简单相关系数和偏相关系数

（SRF）

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i}$$

- 简单相关系数(simple correlationcoefficients)

- Y与X_{2i}之间的相关系数：

$$r_{12} = \frac{\sum y_i x_{2i}}{\sqrt{\sum y_i^2}\sqrt{\sum x_{2i}^2}}$$

- Y与X_{3i}之间的相关系数：

$$r_{13} = \frac{\sum y_i x_{3i}}{\sqrt{\sum y_i^2}\sqrt{\sum x_{3i}^2}}$$

- X_{2i}与X_{3i}之间的相关系数：

$$r_{23} = \frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sqrt{\sum x_{2i}^2}\sqrt{\sum x_{3i}^2}}$$

偏相关系数

——比较3：几点说明

1. $r_{12}=0$, $r_{12\cdot3}$不一定为零。

2. $r_{12}=0$, 如果r_{13}和r_{23}均不为零且符号相同，则$r_{12\cdot3}$为负；如果r_{13}和r_{23}异号，则$r_{12\cdot3}$为正。

3. $r_{12\cdot3}$和 r_{12}不一定同号。

4. 在双变情形中，r^2落在0和1之间。偏相关系数的平方也有同样的性质。

5. $r_{13}=r_{23}=0$并不意味着$r_{12}=0$。也就是说，Y与X_3不相关，同时X_2与X_3不相关，但并不意味着Y与X_2不相关。

本节内容：

§3.2 多元回归分析：推断问题

- 3.2.1 再议正态性假定
- 3.2.2 多元回归中的假设检验：总评
- 3.2.3 检验关于个别偏回归系数的假设
- 3.2.4 检验样本回归的总显著性
- 3.2.5 检验两个回归系数是否相等*
- 3.2.6 受约束的最小二乘法：检验线性等式约束条件
- 3.2.7 检验回归模型的结构或参数稳定性*
- 3.2.8 用多元回归做预测*

正态性假设

——目的：区间估计和统计推断

（SRF）

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i}$$

- 如果回归分析的目的仅在于对回归模型的参数作点估计，则OLS法就足够了，并不需要对干扰项 μ_i的概率分布作任何假定。(OLS估计量是BLUE)
- 如果我们的目的还在于区间估计和统计推断，那么，我们还需要假定μ_i遵循某个概率分布。
  - 假设：

$$u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

  - 那么：

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2_{\hat{\beta}_1})$$

$$\hat{\beta}_2 \sim N(\beta_2, \sigma^2_{\hat{\beta}_2})$$

$$\hat{\beta}_3 \sim N(\beta_3, \sigma^2_{\hat{\beta}_{13}})$$

正态性假设

——回顾：方差、样本方差、样本标准误

（式7.4.9）

$$\sigma^2_{\hat\beta_1}=\mathrm{var}(\hat\beta_1)=[\frac{1}{n}+\frac{\bar X_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar X_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar X_2\bar X_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\sigma^2$$

$$se(\hat\beta_1)=+\sqrt{\widetilde{var}(\hat\beta_1)}=\boxed{\sqrt{\hat\sigma^2_{\hat\beta_1}(\hat\beta_1)}}$$

（式7.4.10）

$$\sigma^2_{\hat\beta_2}=\mathrm{var}(\hat\beta_2)=\frac{\sum x_{3i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2)-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}$$

$$se(\hat\beta_2)=+\sqrt{\widetilde{var}(\hat\beta_2)}=\sqrt{\hat\sigma^2_{\hat\beta_2}(\hat\beta_2)}$$

简单相关系数：$r_{23}^2=\frac{(\sum x_{2i}x_{3i})^2}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2}$

（式7.4.11）

$$\sigma^2_{\hat\beta_3}=\mathrm{var}(\hat\beta_3)=\frac{\sum x_{2i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2)-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}$$

$$se(\hat\beta_3)=+\sqrt{\widetilde{var}(\hat\beta_3)}=\sqrt{\hat\sigma^2_{\hat\beta_3}(\hat\beta_3)}$$

正态性假设
——回顾：$\hat{\beta}_1$的方差、样本方差、样本标准差

($\hat{\beta}_1$真实方差)

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_1}=\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)=[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar{X}_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar{X}_2\bar{X}_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\sigma^2$$

($\hat{\beta}_1$ 真实标准差)

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar{X}_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar{X}_2\bar{X}_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\sigma^2}$$

($\hat{\beta}_1$样本方差)

$$S^2_{\hat{\beta}_1}=[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar{X}_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar{X}_2\bar{X}_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\hat{\sigma}^2$$

($\hat{\beta}_1$ 样本标准差)

$$S_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}_2{}^2\sum x_{3i}^2+\bar{X}_3{}^2\sum x_{2i}^2-2\bar{X}_2\bar{X}_3\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}]\cdot\hat{\sigma}^2}$$

§ 3.1.4
偏回归系数的
OLS估计

正态性假设
——回顾：$\hat{\beta}_2$的方差、样本方差、样本标准差

($\hat{\beta}_2$真实方差)

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_2}=\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)=\frac{\sum x_{3i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2)-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}$$

($\hat{\beta}_2$ 真实标准差)

$$\sigma_{\hat{\beta}_2}=\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}}$$

$$r_{23}^2=\frac{(\sum x_{2i}x_{3i})^2}{\sum x_{2i}^2\sum x_{3i}^2}$$

($\hat{\beta}_2$样本方差)

$$S^2_{\hat{\beta}_2}=\frac{\sum x_{3i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2)-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}\hat{\sigma}^2=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}$$

($\hat{\beta}_2$ 样本标准差)

$$S_{\hat{\beta}_2}=\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}}$$

正态性假设
——回顾：$\hat{\beta}_3$的方差、样本方差、样本标准差

（$\hat{\beta}_3$真实方差）

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_2} = \mathrm{var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sum x_{2i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i}x_{3i})^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}$$

（ $\hat{\beta}_3$ 真实标准差）

$$\sigma_{\hat{\beta}_3} = \sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}}$$

$$r_{23}^2 = \frac{(\sum x_{2i}x_{3i})^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2}$$

（$\hat{\beta}_3$样本方差）

$$S^2_{\hat{\beta}_3} = \frac{\sum x_{2i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i}x_{3i})^2}\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}$$

（ $\hat{\beta}_3$ 样本标准差）

$$S_{\hat{\beta}_3} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}}$$

正态性假设
——原理：构造t统计量

- $\hat{\sigma}^2$是σ^2的无偏估计量：

$$(\mathrm{n}-3)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\mathrm{n}-3) \longrightarrow E(\hat{\sigma}^2)=E(\sigma^2)$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum \mathrm{e}_i^2}{n-3}=\frac{1}{n-3}\left(\sum y_i^2-\hat{\beta}_2\sum y_i x_{2i}-\hat{\beta}_3\sum y_i x_{3i}\right)$$

- 那么，我们可以根据如下t分布，进行区间估计和假设检验：

$$t_1=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{se(\hat{\beta}_1)}\sim t(n-3)$$

$$t_2=\frac{\hat{\beta}_2-\beta_2}{se(\hat{\beta}_2)}\sim t(n-3)$$

$$t_3=\frac{\hat{\beta}_3-\beta_3}{se(\hat{\beta}_3)}\sim t(n-3)$$

正态性假设目的

——示例：儿童死亡率与GNP和妇女识字率

（式8.1.4）

$$\widehat{CM_i} = 263.6416 - 0.0056\ PGNP_i - 2.2316\ FLR_i$$

se=	(11.5932)	(0.0019)	(0.2099)
t=	(22.7411)	(−2.8187)	(−10.6293)
p 值=	(0.0000)*	(0.0065)	(0.0000)*

$R^2 = 0.7077$　　$\bar{R}^2 = 0.6981$

（思考）

- 所观察到这些结论的统计显著性如何?
  - 比如：考虑PGNP 的系数- 0.0056。 这个系数是统计显著的吗? 即它统计显著地异于零吗?
  - 类似地，FLR 的系数-2.2316 是统计显著的吗? 这个系数都是统计显著的吗?

$$E(Y \mid X_2, X_3) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$$

多元回归中的假设检验

———一个概览

- 检验关于个别偏回归系数的假设(§ 3.2.3)
- 检验所估计的多元回归模型的总体显著性，也就是要判别是否全部偏斜率系数同时为零(§ 3.2.4)
- ~~检验两个或多个系数是否相等(§ 3.2.5)~~
- 检验偏回归系数是否满足某种约束条件(§ 3.2.6)
- ~~检验所估计的回归模型在时间上或在不同横截面单元上的稳定性(§ 3.2.7)。~~
- 检验回归模型的函数形式(§ 3.2.8)

检验关于个别偏回归系数的假设

——单个β_i的t假设检验

- 以β_2的t假设检验为例：
  - 构造原假设和备择假设： $H_0:\beta_2=0$； $H_1:\beta_2\neq 0$
  - 计算$(1-\alpha)100\%$：

    $$\hat{\beta}_2-t_{\alpha/2}se(\hat{\beta}_2)\le\beta_2\le\hat{\beta}_2+t_{\alpha/2}se(\hat{\beta}_2)$$
  - 进行显著性检验：
    - 如果计算的t_2值超过选定显著性水平的临界t值就可以拒绝H0；否则就不拒绝它。
- **示例说明：**儿童死亡率与GNP和妇女识字率β_2的t假设检验

$$\widehat{CM}_i=263.6416-0.0056\,PGNP_i-2.2316\,FLR_i$$

$$se=\ (11.5932)\qquad(0.0019)\qquad(0.2099)$$

$$t=\ (22.7411)\qquad(-2.8187)\qquad(-10.6293)$$

- 双尾：$\left|t_{\alpha/2}(\text{n-k})\right|=\left|t_{0.05/2}(61)\right|=2.0$
- 单尾：$\left|t_{1-\alpha}(\text{n-k})\right|=\left|t_{0.95}(61)\right|=1.671$

$$t_2^*=\frac{\hat{\beta}_2-\beta_2}{se(\hat{\beta}_2)}=\frac{-0.0056}{0.002}=-2.8187$$

检验样本回归的总体显著性
——假设的提出（联合假设）

- **估计回归线的总显著性(overall significance)检验：**
  - 含义：检验Y是否与 X_{1i}和X_{2i}两者有线性关系。
  - 假设的提出：

$$H_0:\beta_2=\beta_3=0;\quad H_1:\beta_2,\beta_3\text{不全为零}$$

    - 虚拟假设是关于β_1和β_2联合地或同时地等于零的一个联合假设（joint hypothesis）
  - 注意区别于单个偏相关系数的t检验：
    - 单个偏回归系数t检验时，我们暗含地假定，每一个显著性检验都是根据一个不同的（独立的）样本进行的。
    - 也就是说，我们暗含地假定，在假设H_0: $\beta_2=0$下检验显著性的样本，不同于在假设H_0: $\beta_3=0$下检验显著性的样本。

检验样本回归的总体显著性

——理论根源：方差分析(ANOVA)

（式7.5.3）

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 + 2\sum \hat{y}_i e_i$$
$$= \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$$

TSS = ESS + RSS

总离差平方和 = 总离差平方和 + 总离差平方和

（Table 8-2）
（ANOVA）

变异来源	SS	df	MSS
来自回归（ESS）	$\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$	2	$\dfrac{\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}}{2}$
来自残差（RSS）	$\sum e_i^2$	n-3	$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum e_i^2}{n-3}$
总计 (TSS)	$\sum y_i^2$	**n-1**	

检验样本回归的总体显著性
——原理：构建适合检验的F统计量

- 可以证明，在原假设H_0下，可得如下F统计量：

（式8.4.3）

$$F^* = \frac{MSS_{ESS}}{MSS_{RSS}} = \frac{ESS/df_{ESS}}{RSS/df_{RSS}} = \frac{(\hat{\beta}_2\sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3\sum y_i x_{3i})/2}{\sum e_i^2/(n-3)} \sim F(2,n-3)$$

- 又因为：

（式8.4.4）

$$E\frac{\sum e_i^2}{n-3} = E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \leftarrow u_i \sim N(0,\ \sigma^2)$$

（式8.4.5）

$$\frac{E(\hat{\beta}_2\sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3\sum y_i x_{3i})}{2} = \sigma^2 \leftarrow \begin{matrix} u_i \sim N(0,\ \sigma^2) \\ H_0:\ \beta_2 = \beta_3 = 0 \end{matrix}$$

原理： 如果原假设H_0是真实的，（8.4.4）和（8.4.5）都将对真实σ^2给出同样的估计。即，X_{1i} 和X_{2i}对Y的联合影响和随机影响 毫无区别。如果虚拟假设谬误，即X_{1i} 和X_{2i}确实影响Y，则不能在（8.4.4）和（8.4.5）之间划等号。这时，在适当考虑自由度之后，ESS要相对大于RSS。

检验样本回归的总体显著性
——示例：联合假设$H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$的F检验

（式8. 4. 3）

$$F^* = \frac{MSS_{ESS}}{MSS_{RSS}} = \frac{ESS/df_{ESS}}{RSS/df_{RSS}} = \frac{(\hat{\beta}_2\sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3\sum y_i x_{3i})/2}{\sum e_i^2/(n-3)} \sim F(2,n-3)$$

- （8. 4. 3）的F*值对真实斜率系数同时为零的这一虚拟假设，提供了一种检验。
- 在显著水平α下，如果$\boldsymbol{F^*} > F_\alpha$，则拒绝H0；否则就不能拒绝$H_0$。

➢ **示例：**

（Table 8-3）

表 8—3　儿童死亡率一例的 ANOVA 表

变异来源	SS	df	MSS
来自回归	257 362. 4	2	128 681. 2
来自残差	106 315. 6	61	1 742. 88
总计	363 678	63	

$$F_\alpha(k-1, n\text{-}k) = F_{0.95}(2, 60) = 3.15$$

$$F_2^*(2, 60) = \frac{MSS_{ESS}}{MSS_{RSS}} = \frac{128681.2}{1742.88} = 73.8325$$

检验样本回归的总体显著性

——多元扩展：k变量回归模型的F检验

- 给定k变量回归模型：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- 设计研究假设为：

（式8.4.9）

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0; \quad H_1: \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_k \text{不全为零}$$

- 样本数据的F统计量为：

（式8.4.7）

$$F = \frac{ESS/df}{RSS/df} = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} = \frac{MSS_{ESS}}{MSS_{RSS}} \sim \mathrm{F}(k-1, n-k)$$

- 假设检验的判断：

如果，$F > F_{\alpha}(k-1, n\text{-}k)$，则拒绝$H_0$

检验样本回归的总体显著性

——多元扩展：F与R^2的联系(F的快捷计算公式)

（式8. 4. 3）

$$F=\frac{(n-k)ESS}{(k-1)RSS}$$

$$=\frac{n-k}{k-1}\cdot\frac{ESS}{TSS-ESS}=\frac{n-k}{k-1}\cdot\frac{ESS/TSS}{1-(ESS/TSS)}$$

$$=\frac{n-k}{k-1}\cdot\frac{R^2}{1-R^2}$$

$$=\frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

$$R^2=0,\quad F=0\quad;\quad R^2\uparrow \text{则} F\uparrow;\quad R^2=1,\quad F=\infty$$

- 由此可见，F检验既是所估计回归的总显著性的一个度量，也是$\boldsymbol{R^2}$的一个显著性检验。换句话说，检验虚拟假设（式8. 4. 9）等价于检验总体$\boldsymbol{R^2=0}$ 的虚拟假设。

检验样本回归的总体显著性

——多元扩展：F与R^2的联系（R^2表示的ANOVA）

（Table 8-4）

表8.4 由$\boldsymbol{R^2}$表示的ANOVA表

变异来源	SS	df	MSS
来自回归（ESS）	$R^2(\sum y_i^2)$	k-1	$R^2(\sum y_i^2)/(k-1)$
来自残差（RSS）	$(1-R^2)(\sum y_i^2)$	n-k	$(1-R^2)(\sum y_i^2)/(n-k)$
总计(TSS)	$\sum y_i^2$	**n-1**	

（讨论F检验）

- F的计算将只需要$\boldsymbol{R^2}$和自由度！

案例：儿童死亡率

$$\widehat{CM}_i = 263.6416 - 0.0056\, PGNP_i - 2.2316 FLR_i$$

$$R^2 = 0.7077 \qquad \bar{R}^2 = 0.6981$$

检验样本回归的总体显著性

——多元扩展：何时增加或减少一个解释变量？理论

（知识回顾）

讨论2：R^2可以在不同回归元之间进行分配吗？

案例2：儿童死亡率案例

$$\widehat{CM}_i = 157.4244 - 0.0114\, PGNP_i$$

$$se = (9.8455)\quad (0.0032)\qquad r^2 = 0.1662$$

调整r^2=0.1528

$$\widehat{CM}_i = 263.6416 - 0.0056\, PGNP_i - 2.231\, FLR_i$$

$$se = (11.5932)\ (0.0019)\qquad (0.2099)\qquad R^2 = 0.7077$$

$$\bar{R}^2 = 0.6981\ ①$$

思考：
那么我们能不能知道引入一个新变量对于模型的“边际贡献”呢？

一个思路：

①先单独分析PGNP(X2)对CM的影响。
②再进一步引入新的解释变量FLR(X3)。
③观察ANOVA，进行增量贡献分析。

检验样本回归的总体显著性

——多元扩展：何时增加或减少一个解释变量？理论

表 8—6　用于评价变量增量贡献的 ANOVA 表

变异来源	SS	df	MSS
仅由于 X_2 的 ESS	$Q_1=\hat{\beta}_{12}^2\sum x_2^2$	1	$\frac{Q_1}{1}$
仅由于增加的 X_3 的 ESS	$Q_2=Q_3-Q_1$	1	$\frac{Q_2}{1}$
X_2 和 X_3 共同的 ESS	$Q_3=\hat{\beta}_2\sum y_i x_{2i}+\hat{\beta}_3\sum y_i x_{3i}$	2	$\frac{Q_3}{2}$
RSS	$Q_4=Q_5-Q_3$	$n-3$	$\frac{Q_4}{n-3}$
总计	$Q_5=\sum y_i^2$	$n-1$	

$$F=\frac{\mathrm{Q}_2/\mathrm{df}}{\mathrm{Q}_4/\mathrm{df}}=\frac{(\mathrm{ESS}_{\mathrm{new}}-\mathrm{ESS}_{\mathrm{old}})/\text{新增回归元个数}}{RSS_{\mathrm{new}}/(n-\text{新模型中的参数个数})}$$

$$F=\frac{(\mathrm{R}_{\mathrm{new}}^2-\mathrm{R}_{old}^2)/\text{新增回归元个数}}{(1-\mathrm{R}_{\mathrm{new}}^2)/(n-\text{新模型中的参数个数})}$$

检验样本回归的总体显著性

——多元扩展：何时增加或减少一个解释变量？案例

old模型

$$\widehat{CM}_i = 157.4244 - 0.0114\,PGNP_i$$

$$se = (9.8455) \quad (0.0032) \qquad r^2 = 0.1662$$

$$F^*_{old} = \frac{60449.5}{4890.78} = 12.3598$$

表 8—5 回归方程（8.4.14）的 ANOVA 表

变异来源	SS	df	MSS
ESS（来自 PGNP）	60 449.5	1	60 449.5
RSS	303 228.5	62	4 890.782 2
总计	363 678	63	

new模型

$$\widehat{CM}_i = 263.6416 - 0.0056\,PGNP_i - 2.231\,FLR_i$$

$$se = (11.5932) \; (0.0019) \qquad (0.2099) \qquad R^2 = 0.7077$$

$$F^*_{new} = \frac{128681.2}{1742.88} = 73.8325$$

表 8—3 儿童死亡率一例的 ANOVA 表

变异来源	SS	df	MSS
来自回归	257 362.4	2	128 681.2
来自残差	106 315.6	61	1 742.88
总计	363 678	63	

检验样本回归的总体显著性

——多元扩展：何时增加或减少一个解释变量？案例

表 8—7 说明性例子的 ANOVA 表：增量分析

	变异来源	SS	df	MSS
old模型	仅由于 PGNP 的 ESS	60 449.5	1	60 449.5
	仅由于增加的 FLR 的 ESS	196 912.9	1	196 912.9
new模型	PGNP 和 FLR 共同的 ESS	257 362.4	2	128 681.2
new模型	RSS	106 315.6	61	1 742.878 6
	总计	363 678	63	

$$F=\frac{196\ 912.9}{1\ 742.878\ 6}=112.981\ 4$$

启示——引入新变量的指导准则：
1.模型的比较与选择应该是基于“因变量相同，而解释变量不同”。
2.如果新增变量的系数的t值的绝对值大于1，则调整R^2会增大。

~~检验两个回归系数是否相等~~

~~——自学：本课程不要求掌握！~~

自学：本课程不要求掌握！

受约束的最小二乘法:检验线性等式约束条件

——什么是线性等式约束条件?

- 线性等式约束条件:
  - 根据已有的经济理论,某一回归模型中的系数需满足一些线性等式约束条件。
  - 柯布道格拉斯生产函数(the Cobb-Douglas production function):

（式8. 6. 1）

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{u_i}$$

   – 其中:Y—产出, X_{2i}—劳动投入, X_{3i}—资本投入。

  - 其对数线性模型为:

（式8. 6. 2）

$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i$$

   – 其中: $\beta_0 = \ln \beta_1$

    • 假设所描述的生产是规模报酬不变,由经济理论可知:

（式8. 6. 3）

$$\beta_2 + \beta_3 = 1$$

——线性等式约束条件

受约束的最小二乘法:检验线性等式约束条件
——线性等式约束的检验：t检验

- 如何检验生产是规模报酬不变？也即如何检验：

$$\beta_2+\beta_3=1$$

➢ **方法一： t检验 (静观后效法, post mortem examination)**

- 先做无约束的或无限制的回归（unrestricted or unconstrained regression）：

$$\ln Y_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_2\ln X_{2i}+\hat{\beta}_3\ln X_{3i}+\mathrm{e}_i$$

- 构建t统计量： $t=\dfrac{(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)-(\beta_2+\beta_3)}{se(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)} \sim \mathrm{t}(n-k)$

- 在虚拟假设 $H_0:\beta_2+\beta_3=1$ 下，有：

$$t^*=\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-1}{se(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)}=\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-1}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)+\mathrm{var}(\hat{\beta}_3)+2\,\mathrm{cov}(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3)}}$$

（式8. 6. 4）

如果 $t^*>t_\alpha(n-k)$， 拒绝H_0，即规模报酬可变；
如果$t^*<t_\alpha(n-k)$，则不拒绝H_0（即规模报酬不变）。

受约束的最小二乘法:检验线性等式约束条件

——线性等式约束的检验：F检验(1/3)

➢ 方法二：F检验

（式8. 6. 2） $$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i$$

（式8. 6. 3） $$\beta_2 + \beta_3 = 1$$ ——线性等式约束条件

- **受约束的最小二乘法**（restricted least squares ,RLS）
  - A.直接带入约束条件:

（式8. 6. 5） $$\beta_2 = 1 - \beta_3$$

（式8. 6. 6） $$或: \beta_3 = 1 - \beta_2$$

  - B. 得到转换后的柯布道格拉斯生产函数:

$$\ln Y_i = \beta_0 + (1-\beta_3)\ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i$$
$$= \beta_0 + \ln X_{2i} + \beta_3(\ln X_{3i} - \ln X_{2i}) + u_i$$

（式8. 6. 7） $$(\ln Y_i - \ln X_{2i}) = \beta_0 + \beta_3(\ln X_{3i} - \ln X_{2i}) + u_i$$

（式8. 6. 8） $$或: \quad \ln(Y_i / X_{2i}) = \beta_0 + \beta_3 \ln(X_{3i} / X_{2i}) + u_i$$

受约束的最小二乘法:检验线性等式约束条件

——线性等式约束的检验：F检验(2/3)

- 如何检验生产是规模报酬不变？也即如何检验：

$$\beta_2 + \beta_3 = 1$$

- RLS下F检验步骤如下：

（Unrestricted model）

$$\ln Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 \ln X_{2i} + \hat{\beta}_3 \ln X_{3i} + e_i$$

无约束条件

（Restricted model）

$$(\ln Y_i - \ln X_{2i}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_3 (\ln X_{3i} - \ln X_{2i}) + e_i$$

约束条件：$\beta_2 = 1 - \beta_3$

– 得到：

（式8. 6. 9）

$$F^* = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/m}{RSS_{UR}/(n-k)} = \frac{(\sum e_R{}^2 - \sum e_{UR}^2)/m}{\sum e_{UR}^2/(n-k)} \sim F(m, n\text{-}k)$$

$\sum e_{UR}^2 =$ 无约束回归的RSS

$\sum e_R^2 =$ 受约束回归的RSS

m—线性约束个数 （本例中是1）
k—无约束回归中的参数个数
n—观测次数

如果 $F^* > F_\alpha(m, n-k)$， 拒绝H_0，即规模报酬可变；
如果$F^* < F_\alpha(m, n-k)$，则不拒绝H_0（即规模报酬不变）。

受约束的最小二乘法:检验线性等式约束条件

——线性等式约束的检验：F检验(3/3)

- F统计量公式也可用$\boldsymbol{R^2}$表示:

（式8. 6. 10）

$$F=\frac{(R_{UR}^2-R_R^2)/m}{(1-R_{UR}^2)/(n-k)}$$

R_{UR}^2 =无约束回归的RSS

R_{R}^2 =约束回归的RSS

m—线性约束个数 （本例中是1）
k—无约束回归中的参数个数
n—观测次数

受约束的最小二乘法:检验线性等式约束条件
——实例说明：墨西哥经济的柯布道格拉斯生产函数

（式8. 6. 10）

$$\widehat{\ln GDP}_t = -1.6524 + 0.3397 \ln Labor_t + 0.8460 \ln Capital_t$$
$$t = (-2.7259) \quad (1.8295) \quad (9.0625)$$
$$p\text{值} = (0.0144) \quad (0.0849) \quad (0.0000)$$
$$R^2 = 0.9951$$
$$RSS_{UR} = 0.0136$$

$$\widehat{\ln (GDP/Labor)}_t = -0.4947 + 1.0153 \ln (Capital/Labor)_t$$
$$t = (-4.0612) \quad (28.1056)$$
$$p\text{值} = (0.0007) \quad (0.0000)$$
$$R_R^2 = 0.9777 \qquad RSS_R = 0.0166$$

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/m}{RSS_{UR}/(n-k)} = \frac{(0.0166 - 0.0136)/1}{(0.0136)/(20-3)} = 3.75$$

$$\boldsymbol{F_\alpha(m, n-k) = F_{0.05}(1, 17)}=4.451322$$

~~检验回归模型的结构或稳定性：邹至庄检验~~

~~——自学：本课程不要求掌握！~~

自学：本课程不要求掌握！

~~用多元回归做预测~~

~~——自学：本课程不要求掌握~~！

自学：本课程不要求掌握！

本节内容:

§ 3.3 线性回归模型的矩阵表达

k变量线性回归模型
——原始方程

- k变量总体回归模型(PRF)：

（式C. 1. 1）

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1,2,3,\cdots,n$$

- 其n个联立方程组为：

（式C. 1. 2）

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\
Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + u_n
\end{aligned}$$

k变量线性回归模型
——矩阵表达

- k变量总体回归模型矩阵表达为：

（式C. 1. 3）

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

（式C. 1. 4）

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{y}} = \underset{n\times k}{\mathbf{X}} \; \underset{k\times 1}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{n\times 1}{\mathbf{u}}$$

（式C. 1. 5）

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

我们将用**小写粗体字母**表示向量，用**大写粗体字母**表示矩阵

k变量线性回归模型
——矩阵表达示例：双变量消费—收入模型

- 根据表2-4，一元回归分析中：

（式C. 1. 6）

$$\begin{bmatrix}70\\65\\90\\95\\110\\115\\120\\140\\155\\150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 80\\1 & 100\\1 & 120\\1 & 140\\1 & 160\\1 & 180\\1 & 200\\1 & 220\\1 & 240\\1 & 260\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7\\u_8\\u_9\\u_{10}\end{bmatrix}$$

$$\underset{10\times 1}{\mathbf{y}} = \underset{10\times 2}{\mathbf{X}}\ \underset{2\times 1}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{10\times 1}{\mathbf{u}}$$

经典线性回归模型假设的矩阵表达
——相关假设

表C-1　关于经典回归模型的假定

标量符号		矩阵符号
假设1：对每个i，$E(u_i)=0$	(3.2.1)	$E(\mathbf{u})=0$ 其中u和0都是n×1列向量且0是零向量
假设2：$E(u_iu_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \sigma^2, & i=j\end{cases}$	(3.2.5) (3.2.2)	$E(\mathbf{uu}')=\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{I}$ 其中I是n×n单位矩阵
假设3：$X_2,X_3,\cdots,X_k$ 是非随机的或固定的		n×k矩阵X是非随机的,即它由固定数的一个集合构成
假设4：X诸变量之间无完全的线性关系,即无多重共线性	(7.1.7)	$\mathrm{R}(\mathbf{X})=\mathrm{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})=k$　其中k是X中的列数,且k小于观测次数n
假设5：$u_i \sim N(0,\sigma^2)$	(4.2.4)	$\mathbf{u}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$

经典线性回归模型假设的矩阵表达
——假设1：干扰项的期望等于零

➢ **假设1：干扰项的期望等于零**

$$E(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \xrightarrow{\text{表达式代表}} E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

经典线性回归模型假设的矩阵表达
——干扰项的方差-协方差矩阵

- 干扰项的方差-协方差矩阵(variance covariance matrix)

$$E(\mathbf{uu}') = E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \cdots u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 \cdots u_2u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_uu_1 & u_nu_2 \cdots u_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2)\cdots E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2)\cdots E(u_2u_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2)\cdots E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

经典线性回归模型假设的矩阵表达
——假设2：同方差性及无序列相关性的假设

- **假设2：同方差性及无序列相关性的假设**

$$E(\mathbf{uu}') = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2)\cdots E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2)\cdots E(u_2u_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2)\cdots E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 \end{bmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}$$

经典线性回归模型假设的矩阵表达
——假设2：同方差性及无序列相关性的假设

➢ **假设4：X诸变量之间无完全线性关系，即无多重共线性**

$$\mathrm{R}(\mathbf{X}) = \mathrm{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = k$$

- 其中R表示矩阵的秩

- 该矩阵表达式说明：X 矩阵是列满秩(full column rank) 的，也即其秩等于矩阵的列数。
- 表明： X 矩阵的列是线性独立的，即在X 变量之间无完全的线性关系即无多重共线性.

最小二乘法估计(OLS)
——样本回归函数(SRF)的矩阵表达

（式C. 3. 1）

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i$$

（式C. 3. 3）

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \cdots X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \cdots X_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} \cdots X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{y}} = \underset{n\times k}{\mathbf{X}} \; \underset{k\times 1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} + \underset{n\times 1}{\mathbf{e}}$$

（式C. 3. 2）

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e}$$

最小二乘法估计(OLS)
——残差平方和：矩阵表达式

（式C. 3. 1）

$$\sum e_i^2 = \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right)^2$$

$$= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = \left[e_1 \;\; e_2 \cdots e_n\right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

（式C. 3. 3）

$$= \mathbf{e}'\mathbf{e} = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

（式C. 3. 2）

$$\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}\right)' = \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}$$

标量的转置还是自身！ $\boxed{(1*k)\bullet(k*n)\bullet(n*1)=(1*1)}$

最小二乘法估计(OLS)
——偏导数等于零：代数式

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 2\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right)(-X_{2i}) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_k} = 2\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{ki} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right)(-X_{ki}) = 0$$

最小二乘法估计(OLS)
——正规方程组：代数式

（式C. 3. 8）

$$n\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\sum X_{2i}+\hat{\beta}_3\sum X_{3i}+\mathrm{L}\ +\hat{\beta}_k\sum X_{ki}=\sum Y_i$$

$$\hat{\beta}_1\sum X_{2i}+\hat{\beta}_2\sum X_{2i}^2+\hat{\beta}_3\sum X_{2i}X_{3i}+\mathrm{L}\ +\hat{\beta}_k\sum X_{2i}X_{ki}=\sum X_{2i}Y_i$$

$$\hat{\beta}_1\sum X_{3i}+\hat{\beta}_2\sum X_{3i}X_{2i}+\hat{\beta}_3\sum X_{3i}^2+\mathrm{L}\ +\hat{\beta}_k\sum X_{3i}X_{ki}=\sum X_{3i}Y_i$$

L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L

$$\hat{\beta}_1\sum X_{ki}+\hat{\beta}_2\sum X_{ki}X_{2i}+\hat{\beta}_3\sum X_{ki}X_{3i}+\mathrm{L}\ +\hat{\beta}_k\sum X^2{}_{ki}=\sum X_{ki}Y_i$$

最小二乘法估计(OLS)
——正规方程组：矩阵表达式

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} \cdots & \sum X_{ki} \\
\sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\
\sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 \cdots & \sum X_{3i}X_{ki} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} \cdots & \sum X_{ki}^2
\end{bmatrix}}_{(\mathbf{X}'\mathbf{X})}
\underbrace{\begin{bmatrix}
\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k
\end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & 1 \cdots & 1 \\
X_{21} & X_{22} \cdots & X_{2n} \\
X_{31} & X_{32} \cdots & X_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
X_{k1} & X_{k2} & X_{kn}
\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}'}
\underbrace{\begin{bmatrix}
Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n
\end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}
$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

最小二乘法估计(OLS)
——变量矩阵：矩阵特点

$$\mathbf{X'X}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ X_{21} & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ X_{k1} & X_{k2} & X_{k3} & \cdots & X_{kn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1}\\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i}\cdots\sum X_{ki}\\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i}\cdots\sum X_{2i}X_{ki}\\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2\cdots\sum X_{3i}X_{ki}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i}\cdots\sum X_{ki}^2\end{bmatrix}$$

- 特点：
  - (1)它给出X 变量的原始平方和与交叉乘积和， 变量之一是每次观测都取值1 的截距项,主对角线上的元素是原始平方和.而主对角线以外的元素则是原始交叉乘积和。（“原始” 是指以原有度量单位计算的）。
  - (2)它是对称的;
  - (3) 它的阶数是$(k\times k)$,也就是k行与k列

最小二乘法估计(OLS)
——参数估计：两种矩阵推导方法(之一：正规方程组法)

（式C. 3. 11）

$$\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$if \ \exists \ \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$(k\times 1) \quad (k\times k) \quad (k\times n)\ (n\times 1)$$

最小二乘法估计(OLS)

——参数估计：两种矩阵推导方法（之二：矩阵运算法）

$$\frac{\partial \mathbf{e}'\mathbf{e}}{\partial \hat{\boldsymbol\beta}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol\beta}}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}\right)'\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol\beta}}（\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta} + \hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}）= 0$$

$$-2\mathbf{X}'\mathbf{y} + (\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta} + \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}) = \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\hat{\boldsymbol\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

若$\mathbf{F} = \mathbf{AZ}$,则$\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{A}'$;

若$\mathbf{F} = \mathbf{ZA}$,则$\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{A}$;

若$\mathbf{F} = \mathbf{Z}'\mathbf{A}$,则$\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{A}$;

若$\mathbf{F} = \mathbf{A}'\mathbf{ZB}$,则$\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{AB}'$;

若$\mathbf{F} = \mathbf{A}'\mathbf{Z}'\mathbf{B}$,则$\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{BA}'$

若$\mathbf{F} = \mathbf{Z}'\mathbf{AZ}$,则$\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{AZ}+\mathbf{A}'\mathbf{Z}$;

$if\ \exists\ \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$

最小二乘法估计(OLS)
——示例计算：消费-收入例子

$$\begin{bmatrix}70\\65\\90\\95\\110\\115\\120\\140\\155\\150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&80\\1&100\\1&120\\1&140\\1&160\\1&180\\1&200\\1&220\\1&240\\1&260\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7\\u_8\\u_9\\u_{10}\end{bmatrix}$$

$$\underset{10\times1}{\mathbf{y}}=\underset{10\times2}{\mathbf{X}}\;\underset{2\times1}{\boldsymbol{\beta}}+\underset{10\times1}{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{X'X}=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\X_1&X_2&X_3&\cdots&X_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&X_1\\1&X_2\\1&X_3\\&\cdots\\1&X_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n&\sum X_i\\\sum X_i&\sum X_i^2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'X}=\begin{bmatrix}10&1\,700\\1\,700&322\,000\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X'X})^{-1}=\begin{bmatrix}0.975\,76&-0.005\,152\\-0.005\,152&0.000\,030\,3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'y}=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\X_1&X_2&X_3&\cdots&X_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum Y_i\\\sum X_iY_i\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'y}=\begin{bmatrix}1\,110\\205\,500\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}\hat\beta_1\\\hat\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.975\,76&-0.005\,152\\-0.005\,152&0.000\,030\,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\,110\\205\,500\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24.454\,5\\0.507\,9\end{bmatrix}$$

最小二乘法估计(OLS)
——$\hat{\beta}_i$的方差和协方差：矩阵表达(结果)

$$\operatorname{var-cov}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)=E\left\{\left[\hat{\boldsymbol{\beta}}-E\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right]\left[\hat{\boldsymbol{\beta}}-E\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right]'\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_1\right) & \operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2\right) & \cdots & \operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_k\right)\\ \operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1\right) & \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right) & \cdots & \operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_k\right)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_1\right) & \operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_2\right) & \cdots & \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_k\right)\end{bmatrix}$$

$$=\sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

最小二乘法估计(OLS)
——$\hat{\beta}_i$的方差和协方差：矩阵表达（推导过程）

$$\text{var-cov}(\hat{\boldsymbol\beta})$$
$$= E\left[(\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol\beta)(\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol\beta)'\right]$$
$$= E\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right]\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right]'\right\}$$
$$= E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\boxed{\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}\right]$$
$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$
$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$
$$= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol\beta+\mathbf{u}$$

$$\hat{\boldsymbol\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$
$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol\beta+\mathbf{u})$$
$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol\beta+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$
$$= \boldsymbol\beta+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$
$$\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol\beta = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

$$(\mathrm{AB})' = \mathrm{B}'\mathrm{A}'$$
$$\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]' = \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})'\right]^{-1}$$
$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

X取固定值；且$E(\boldsymbol\mu\boldsymbol\mu')=\sigma^2\mathbf{I}$

最小二乘法估计(OLS)
——σ^2的估计：矩阵表达

- 可以证明σ^2的无偏估计量是(证明略)：

$$\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

- 其中，残差方差：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k}$$

最小二乘法估计(OLS)
——平方和分解：RSS的矩阵表达

$$\mathrm{RSS}=\sum e_i^2=\mathbf{e}'\mathbf{e}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'\mathbf{e} &= (\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})\\
&= (\mathbf{y}'-\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}')(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})\\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y}-\boxed{\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}}-\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}+\boxed{\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}}\\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-(\mathbf{y}'-\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}')\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}\\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-\mathbf{e}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}\\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-(\mathbf{X}'\mathbf{e})'\hat{\boldsymbol\beta}\\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}+\mathbf{e}\\
\mathbf{y}' &= \hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'+\mathbf{e}'\\
\mathbf{y}'-\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}' &= \mathbf{e}'
\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol\beta}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}+\mathbf{e}\\
\mathbf{X}'\mathbf{y} &= \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}+\mathbf{X}'\mathbf{e}\\
\mathbf{X}'\mathbf{y} &= \mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}+\mathbf{X}'\mathbf{e}\\
&= \mathbf{X}'\mathbf{y}+\mathbf{X}'\mathbf{e}\\
\mathbf{X}'\mathbf{e} &= 0
\end{aligned}$$

最小二乘法估计(OLS)
——平方和分解：TSS=ESS+RSS的矩阵表达

$$\mathbf{TSS} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2$$

$$\mathbf{RSS}=\mathbf{e}'\mathbf{e} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\mathbf{ESS} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2$$

$\mathbf{n}\bar{Y}^2$被称为均值修正值

$$\begin{aligned}\mathrm{TSS} &= \sum y_i^2 \\ &= \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \\ &= \sum (Y_i^2 - 2Y_i\bar{Y} + \bar{Y}^2) \\ &= \sum Y_i^2 - 2\bar{Y}\sum Y_i + n\bar{Y}^2 \\ &= \sum Y_i^2 - 2\bar{Y}n\bar{Y} + n\bar{Y}^2 \\ &= \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2 \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{ESS} &= \mathbf{TSS} - \mathbf{RSS} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2 - (\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}) \\ &= \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{ESS} &= \sum y_i^2 - (\sum y_i^2 - \hat{\beta}_2\sum y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3\sum y_i x_{3i} - \cdots - \hat{\beta}_k\sum y_i x_{ki}) \\ &= \hat{\beta}_2\sum y_i x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k\sum y_i x_{ki}\end{aligned}$$

最小二乘法估计(OLS)
——回归系数估计量的性质：BLUE的矩阵证明1/3

- 线性性： $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$

- 无偏性：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \\ &= \boldsymbol{\beta}+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}$$

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = E(\boldsymbol{\beta})+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\beta}$$

最小二乘法估计(OLS)
——回归系数估计量的性质：BLUE的矩阵证明2/3

- 最小方差性：
  - 令$\boldsymbol{\beta}^*$为$\boldsymbol{\beta}$的任意其他线性估计量，则：

$$\boldsymbol{\beta}^* = \left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{C}\right]\mathbf{y}$$

$$= \left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{C}\right]\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}\right)$$

$$= \boldsymbol{\beta} + \mathbf{C}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\beta}^* - \boldsymbol{\beta} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}$$

若要求$\boldsymbol{\beta}^*$为$\boldsymbol{\beta}$的一个无偏估计量，则：$\mathbb{C}\mathbb{X} = \mathbf{0}$

最小二乘法估计(OLS)
——回归系数估计量的性质：BLUE的矩阵证明3/3

- 根据方差定义，有：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{var\text{-}cov}\left(\boldsymbol{\beta}^*\right) &= \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\beta}^* - \boldsymbol{\beta}\right)\left(\boldsymbol{\beta}^* - \boldsymbol{\beta}\right)' \\
&= \mathbf{E}\left\{\left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}\right]\left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}\right]'\right\} \\
&= \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} + \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}' \\
&= \mathbf{var\text{-}cov}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) + \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}'
\end{aligned}
$$

$\because$ $\sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}'$是半正定矩阵，主对角线元素$\geq 0$，

$\therefore$ $\mathbf{var\text{-}cov}\left(\boldsymbol{\beta}^*\right) \geq \mathbf{var\text{-}cov}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$，即最小方差性成立。

用矩阵表示的判定系数R^2

$$\mathbf{TSS} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2$$

$$\mathbf{RSS} = \mathbf{e}'\mathbf{e} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\mathbf{ESS} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2$$

$$R^2 = \frac{\mathbf{ESS}}{\mathbf{TSS}}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum y_i x_{ki}}{\sum y^2{}_i}$$

$$= \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2}$$

相关系数矩阵
——correlation matrix R

- **相关系数矩阵：**
  - k变量回归模型共有$\frac{k(k+1)}{2}$个相关系数：

$$
R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\cdots r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\cdots r_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3}\cdots r_{kk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13}\cdots r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23}\cdots r_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3}\cdots 1 \end{bmatrix}
$$

对单个回归系数进行假设检验的矩阵表达
——t检验：原理及矩阵形式

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\mathbf{u} \sim N\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N\left[\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]$$

$$\mathrm{var\text{-}cov}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S_{\hat{\beta}_i}} \sim t(n-k)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} = \frac{RSS}{n-k} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{S_{\hat{\beta}_j}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{c_{ij}\dfrac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k}}}$$

以c_{ij}表示矩阵$(X`X)^{-1}$主对角线上的第j个元素

检验回归的总显著性:方差分析的矩阵表达
——判定系数R^2的矩阵形式

变异来源	平方和(SS)	自由度	均方和MSS
来自回归(即来自X_2, $X_3 \ldots X_k$)	$\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2$	k-1	$\dfrac{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2}{k-1}$
来自残差	$\mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$	n-k	$\dfrac{\mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k}$
总计	$\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2$	**n-1**	

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2\right)}{\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2}$$

$$\overline{R}^2=\frac{ESS/f_{ESS}}{TSS/f_{TSS}}=\frac{MSS_{ESS}}{MSS_{TSS}}=\frac{\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2\right)/k-1}{\left(\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2\right)/n-1}$$

检验回归的总显著性:方差分析的矩阵表达
——F检验：k 变量线性回归的ANOVA矩阵形式

变异来源	平方和(SS)	自由度	均方和MSS
来自回归(即来自X_2，$X_3 \ldots X_k$)	$\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2$	k-1	$\dfrac{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2}{k-1}$
来自残差	$\mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$	n-k	$\dfrac{\mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k}$
总计	$\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2$	**n-1**	

$$F^*=\frac{\mathrm{ESS}/f_{ESS}}{\mathrm{RSS}/f_{RSS}}=\frac{MSS_{ESS}}{MSS_{RSS}}=\frac{\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2\right)/(k-1)}{\left(\mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}\right)/(n-k)}$$

检验回归的总显著性:方差分析的矩阵表达
——F检验：由R^2表示的k变量ANOVA矩阵形式

变异来源	平方和	自由度	均方和
来自回归(即来自 $X_2, X_3, \cdots, X_k$)	$R^2(\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2)$	$k-1$	$\frac{R^2(\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2)}{k-1}$
来自残差	$(1-R^2)(\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2)$	$n-k$	$\frac{(1-R^2)(\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2)}{n-k}$
总计	$\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{Y}^2$	$n-1$	

$$F=\frac{R^2/(k-1)}{1-R^2/n-k}$$

检验线性约束:用矩阵法表示的一般F检验法
——自学：本课程不要求掌握

自学：本课程不要求掌握

用多元回归做预测
——均值$E(Y_0)$预测：矩阵表达(1/2)

对于模型$\hat{Y}=X\hat{\beta}$,给定$X_0=(1,X_{01},X_{02},\cdots,X_{0k})$

$$E(\hat{Y}_0)=E(\mathbf{X}_0\hat{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{X}_0E(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta}=E(Y_0)$$

方差定义

$$Var(\hat{Y}_0)=E(\mathbf{X}_0\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta})^2=E(\mathbf{X}_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\mathbf{X}_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}))$$

$X_0(\hat{\beta}\text{-}\beta)$为标量

$$\begin{aligned}Var(\hat{Y}_0)&=E(\mathbf{X}_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}_0')\\&=\mathbf{X}_0E(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}_0'\\&=\sigma^2\mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0'\end{aligned}$$

标量的转置为其自身

$E(\hat{\beta}\text{-}\beta)(\hat{\beta}\text{-}\beta)'$即$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$

$\mathrm{Var}(\hat{\beta})=\sigma^2(X'X)^{-1}$

$$\hat{Y}_0\sim N(\mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta},\sigma^2\mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0')$$

用多元回归做预测
——均值E(Y₀)预测：矩阵表达(2/2)

取随机扰动项的样本估计量$\hat{\sigma}^2$，构造如下t统计量

$$\frac{\hat{Y}_0 - E(Y_0)}{S_{\hat{Y}_0}} = \frac{\hat{Y}_0 - E(Y_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}} \sim t(n-k)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-k}$$

于是，得到(1−α)的置信水平下E(Y_0)的**置信区间**：

$$\hat{Y}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{X}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_0'} < E(Y_0) < \hat{Y}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{X}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_0'}$$

其中，$t_{\alpha/2}$为(1−α)的置信水平下的**临界值**。

用多元回归做预测
——个值Y_0预测：矩阵表达(1/2)

$$e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0$$

$$\begin{aligned} E(e_0) &= E(\mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta} + \mu_0 - \mathbf{X}_0\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= E(\mu_0 - \mathbf{X}_0(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})) \\ &= E(\mu_0 - \mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\mu}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

PRF和SRF的定义

$$\begin{aligned} \hat{\beta}-\beta &= (X'X)^{-1}X'Y-\beta \\ &= (X'X)^{-1}X'(X\beta+\mu)-\beta \\ &= \beta+(X'X)^{-1}X'\mu-\beta \\ &= (X'X)^{-1}X'\mu \end{aligned}$$

扰动项期望为0假设

$$\begin{aligned} Var(e_0) &= E(e_0^2) \\ &= E(\mu_0 - \mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\mu})^2 \\ &= \sigma^2(1+\mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0') \end{aligned}$$

方差定义，且$E(e_0)=0$

同上面的推导

用到标量转置性质

思考：有没有更简单的思路得出$Var(e_0)$???

用多元回归做预测
——个值Y_0预测：矩阵表达(2/2)

$$e_0 \sim N(0, \sigma^2(1+\mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0'))$$

$$S_{e_0}^2 = \hat{\sigma}^2\left[1+\mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0\right]$$

$$S_{e_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2\left[1+\mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0\right]}$$

$$t = \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{S_{e_0}} = \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\mathbf{1}+\mathbf{x}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0)}} \sim t(n-k)$$

$$\hat{Y}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}\sqrt{1+\mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0'} < Y_0 < \hat{Y}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}\sqrt{1+\mathbf{X}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0'}$$

人均私人消费支出与(人均可支配收入和时间)的关系
——数据表与基础计算

PPCE, Y	PPDI, X_2	时间, X_3	PPCE, Y	PPDI, X_2	时间, X_3
1 673	1 839	1 (=1956)	1 948	2 126	9
1 688	1 844	2	2 048	2 239	10
1 666	1 831	3	2 128	2 336	11
1 735	1 881	4	2 165	2 404	12
1 749	1 883	5	2 257	2 487	13
1 756	1 910	6	2 316	2 535	14
1 815	1 969	7	2 324	2 595	15 (=1970)
1 867	2 016	8			

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \hat{u}_i$$

$$\underset{15\times1}{\mathbf{y}} = \underset{15\times3}{\mathbf{X}} \quad \underset{3\times1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} + \underset{15\times1}{\hat{\mathbf{u}}}$$

$\bar{Y} = 1\ 942.333 \quad \bar{X}_2 = 2\ 126.333 \quad \bar{X}_3 = 8.0$

$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 830\ 121.333$

$\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 = 1\ 103\ 111.333 \quad \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 = 280.0$

人均私人消费支出与(人均可支配收入和时间)的关系
——求出回归系数矩阵

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \cdots X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \cdots X_{3n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \\ 1 & X_{23} & X_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{2i}X_{3i} & \sum X_{3i}^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 15 & 31\,895 & 120 \\ 31\,895 & 68\,922.513 & 272\,144 \\ 120 & 272\,144 & 1\,240 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}=\begin{bmatrix} 37.232\,491 & -0.022\,508\,2 & 1.336\,707 \\ -0.022\,508\,2 & 0.000\,013\,7 & -0.000\,831\,9 \\ 1.336\,707 & -0.000\,831\,9 & 0.054\,034 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{y}=\begin{bmatrix} 29\,135 \\ 62\,905\,821 \\ 247\,934 \end{bmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}=\begin{bmatrix} 300.286\,25 \\ 0.741\,98 \\ 8.043\,56 \end{bmatrix}$$

人均私人消费支出与(人均可支配收入和时间)的关系
——求出方差-协方差矩阵

$$\sum e_i^2 = \mathbf{e}'\mathbf{e} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$= 57\ 420\ 003 - [300.286\ 25 \quad 0.741\ 98 \quad 8.043\ 56]\begin{bmatrix} 29\ 135 \\ 62\ 905\ 821 \\ 247\ 934 \end{bmatrix}$$

$$= 1\ 976.855\ 74$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{12} = 164.73797$$

$$var\text{-}cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 6\ 133.650 & -3.707\ 94 & 220.206\ 34 \\ -3.707\ 94 & 0.002\ 26 & -0.137\ 05 \\ 220.206\ 34 & -0.137\ 05 & 8.901\ 55 \end{bmatrix}$$

人均私人消费支出与(人均可支配收入和时间)的关系
——平方和分解、可决系数、t检验

ESS: $\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2=828\ 144.477\ 86$

TSS: $\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2=830\ 121.333$

$$R^2=\frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2}{\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\overline{Y}^2}=\frac{828\ 144.477\ 86}{830\ 121.333}=0.997\ 61$$

$t_{0.05/2}(12)=2.178813$

$$\hat{Y}_i=300.286\ 25+0.741\ 98X_{2i}+8.043\ 56X_{3i}$$

$$(78.317\ 63)\qquad(0.047\ 53)\qquad(2.983\ 54)$$

$$t=(3.834\ 21)\qquad(15.609\ 56)\qquad(2.695\ 98)$$

$$R^2=0.997\ 61\qquad \bar{R}^2=0.997\ 22\qquad df=12$$

人均私人消费支出与(人均可支配收入和时间)的关系
——ANOVA和F检验

表 C—5　　表 C—4 中数据的 ANOVA 表

变异来源	平方和	自由度	均方和
来自 X_2，X_3	828 144. 477 86	2	414 072. 389 3
来自残差	1 976. 855 74	12	164. 737 97
总计	830 121. 333 60	14	

$$F=\frac{414\ 072.389\ 3}{164.737\ 97}=2\ 513.52$$

$F_{0.05}(2,12)=3.885294$

人均私人消费支出与(人均可支配收入和时间)的关系——预测

$$(\text{PPCE}_{1971} \mid \text{PPDI}_{1971}, X_3 = 16) = \mathbf{x}'_{1971}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2\,610 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300.286\,25 \\ 0.741\,98 \\ 8.043\,56 \end{bmatrix} = 2\,365.55$$

$$\text{var}(\hat{Y}_{1971} \mid \mathbf{x}'_{1971}) = \hat{\sigma}^2[\mathbf{x}'_{1971}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_{1971}]$$

$$= 164.737\,97 \begin{bmatrix} 1 & 2\,610 & 16 \end{bmatrix} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\,610 \\ 16 \end{bmatrix} = 48.642\,6$$

$$\text{se}(\hat{Y}_{1971} \mid \mathbf{x}'_{1971}) = 6.974\,4$$

$$\text{var}(Y_{1971} \mid \mathbf{x}'_{1971}) = 213.380\,6$$

$$\text{se}(Y_{1971} \mid \mathbf{x}'_{1971}) = 14.607\,6$$